НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ЛЕКЦИЯ 7

4.3 Метод точечных отображений (преобразований)

Мы ознакомились с методом исследования поведения системы, заключающимся в построении и исследовании фазовых траекторий на плоскости. Он относится к методам фазового пространства. Но у него есть некоторый недостаток: сколько находить траекторий, с каким шагом, чтобы не пропустить важных особенностей системы? Этого недостатка лишен другой метод, относящийся также к методам фазового пространства. Это – метод точечных отображений, или метод отображений Пуанкаре. Его можно рассматривать, как развитие метода припасовывания. Метод точечных отображений используется в основном для исследования колебательного движения систем.

Метод заключается в построении в фазовом пространстве некоторой секущей поверхности, через которую в процессе колебаний циклически проходят исследуемые фазовые траектории и изучении закономерностей изменении координат точек пересечения.

Итак: метод точечных отображений заключается в построении некоторой секущей поверхности в фазовом пространстве, через которую в процессе колебаний циклически проходят исследуемые фазовые траектории и изучении закономерностей изменении координат точек пересечения.

Как и для метода припасовывания, метод точечных отображений имеет наибольшее применение для систем второго порядка.

Рассмотрим фазовый портрет нелинейной системы с одной фазовой траекторией в виде спирали (рисунок 4.10)

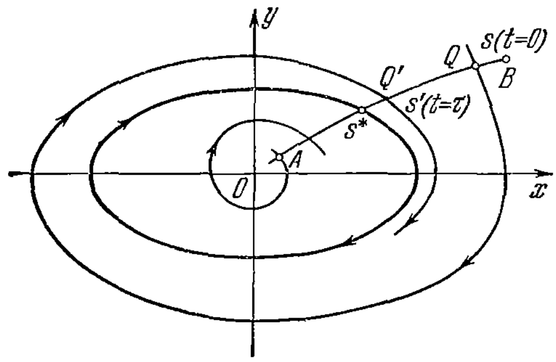

Рисунок 4.10 – Фазовый портрет системы с линией точечного отображения

Проведем отрезок линии AB, который пересекается с этой траекторией на каждом ее витке, то есть на каждом цикле вращения траектории. Это может быть любая удобная линия, например, координатная ось. Выберем какую либо точку пересечения линии AB с фазовой траекторией и обозначим ее расстояние от точки A вдоль линии через s_1. Траектория после этой точки делает виток и вновь пересекается с линией AB. *Новая точка пересечения называется последующей*. Обозначим ее расстояние от A через s_2. Значение s_2 зависит от s_1 и от свойств системы. Можно записать

$$s_2 = \varphi(s_1), \qquad (4.20)$$

где φ – функция, зависящая от свойств системы, называемая функцией последования.

Для i – й и i+1– й точек можно записать (4.20) в более общей форме

$$s_{i+1} = \varphi(s_i). \qquad (4.212)$$

Уравнение (4.21) называется уравнением точечного отображения.

Таким образом, *функция, связывающая координаты соседних пересечений фазовой траектории с данной линией, называется функцией последования. Функция последования определяет процесс точечного отображения.*

Функция последования находится путем решения уравнений системы в точках пересечения с линией АБ. Исследование системы теперь заключается в рассмотрении последующих точек с помощью функции последования.

Таким образом, метод точечных отображений заключается в выполнении следующих действий:

1) *находится функция последования*;

2) *исследуется поведение системы с помощью функции последования.*

Более детально рассмотрим второй пункт. Рассмотрим рисунок 4.10. На этом рисунке изображены три характерные траектории:

1) траектории, составляющие замкнутый предельный цикл На этой траектории – точка s^*. Такие траектории означают автоколебания в системе;

2) спираль, сходящаяся к замкнутому циклу (точка Q). Означает сходящийся колебательный процесс;

3) расходящаяся спираль (точка A). Означает расходящийся колебательный процесс;

С помощью функции последования как раз и можно выявить характер и вид фазовых траекторий. Это удобно делать графически следующим образом.

1) Строится функция последования $s_{i+1} = \varphi(s_i)$ в координатах своих переменных s_{i+1} и s_i (рисунок 4.11).

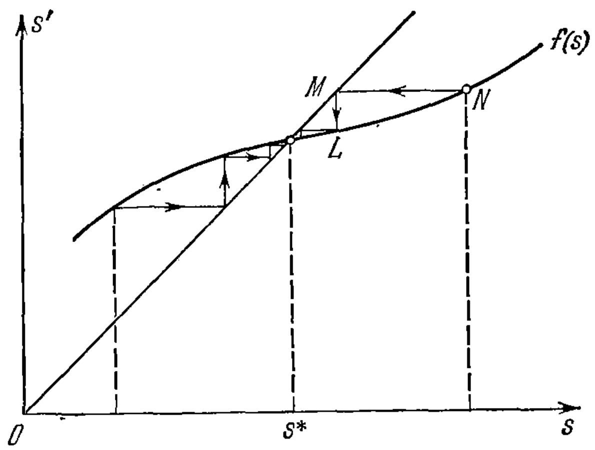

Рисунок 4.11 – Процесс точечного преобразования. s' – ось последующих точек.

Для удобства построений проводится биссектриса координатного угла.

2) Если функция последования пересекается с биссектрисой, то точка пересечения сразу дает координату s^* замкнутой фазовой траектории. Действительно, если мы в качестве исходной точки возьмем s_i^*, то, как это следует из графика, точкой s_{i+1}^* будет точка с тем же значением, то есть $s_{i+1}^* = s_i^* = s^*$. Но это и является признаком замкнутой фазовой траектории. В системе будут автоколебания.

Итак: *Точка пересечения функции последования с биссектрисой координатного угла дает координату автоколебаний системы.*

3) Выясняем характер движения системы за пределами замкнутых фазовых траекторий. Для этого возьмем точку s_1 не совпадающую с s^*. Откладываем эту точку по оси абсцисс до пересечения с функцией последования и находим на оси ординат значение s_2, соответствующее s_1 на следующем витке спирали. Это значение s_2 нужно снова перенести на ось абсцисс и найти s_3. Но удобнее и нагляднее это сделать с помощью биссектрисы так, как это показано на рисунке 4.11. Как видно, у нас точки справа от точки s^* сходятся к s^*. Проделывая те же операции с точками слева от s^*, получаем тот же результат. Следовательно, точка s^* соответствует устойчивому предельному циклу.

Рассмотрим другую функцию последования (рисунок 4.12). Здесь также эта функция пересекается с биссектрисой. Исследуем характер движения системы в области этого предельного цикла. Выполняя построения, аналогичные изображенным на рисунке 4.11, приходим к выводу, что данный предельный цикл неустойчивый. В чем разница той и другой точки? Разница в коэффициенте наклона функции последования в точке пересечения. Учитывая, что угол наклона биссектрисы равен единице, имеем условие устойчивости предельного цикла: производная от функции последования по координате в точке предельного цикла должна быть меньше единицы.

Итак: *для устойчивого предельного цикла производная от функции последования по координате в точке предельного цикла должна быть меньше единицы.*

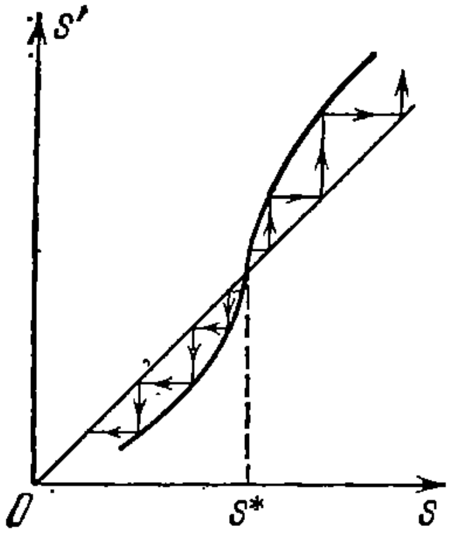

Рисунок 4.12 – Процесс точечного преобразования с неустойчивым предельным циклом

Рассмотрим другую функцию последования (рисунок 4.13).

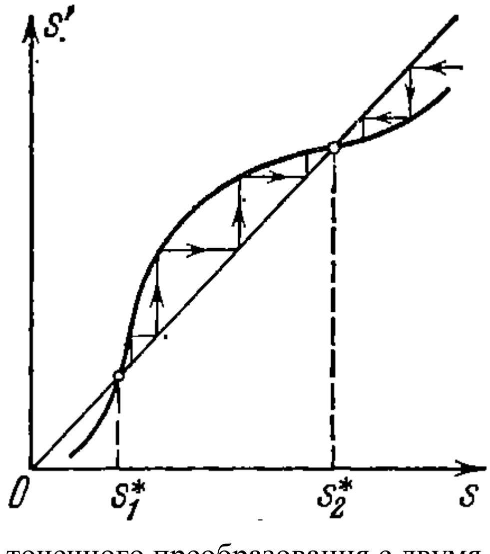

Рисунок 4.13 – Процесс точечного преобразования с двумя предельными циклами

Здесь биссектриса дважды пересекает функцию последования, что означает существование двух предельных циклов.

Если функция последования не пересекается с биссектрисой, то это означает отсутствие предельных циклов, то есть автоколебаний (рисунки 4.14, 4.15). Амплитуда колебаний при этом может увеличиваться (говорят, колебания расходятся) или уменьшаться (колебания затухают). На рисунке 4.12 представлен случай расходящихся колебаний, на рисунке 4.10 – затухающих колебаний

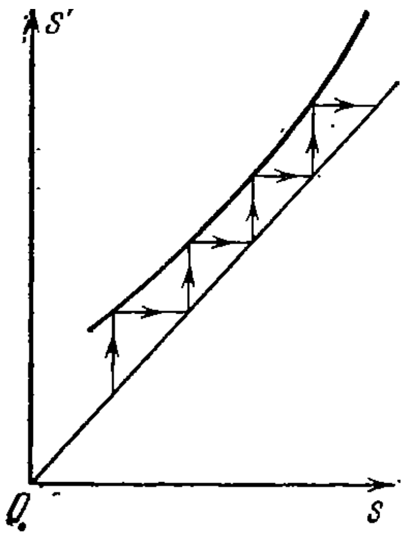

Рисунок 4.14 – Процесс точечного преобразования при отсутствии предельных циклов и расходящихся колебаний

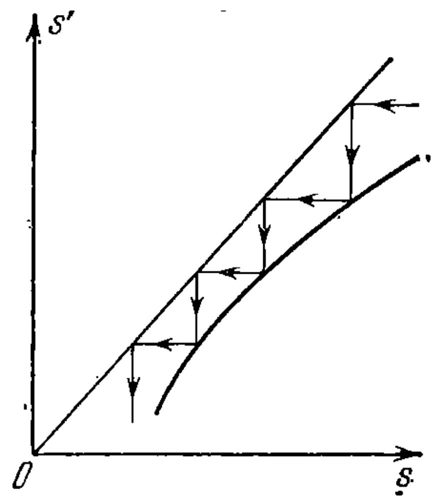

Рисунок 4.15 – Процесс точечного преобразования при отсутствии предельных циклов и затухающих колебаний

Графики на рисунках 4.11 – 4.15 называются диаграммами точечного преобразования. Изображение хода точечного преобразования на такой диаграмме эквивалентно сопряжению начальных и концевых условий соседних участков в методе припасовывания. Но производится это специальным и достаточно простым геометрическим построением.

Основным в методе точечного отображения является нахождение функции последования (4.21)

$$s_{i+1} = \varphi(s_i)$$

Эту функцию можно найти, решая уравнения дифференциальные уравнения исследуемой системы. Однако обычно это – трудная задача. В большинстве случаев бывает легче представить функцию последования в параметрической форме. Эта форма содержит в качестве параметра τ время прохождения изображающей точки по фазовой траектории от исходной точки Q (рисунок 4.10) до ее последующей Q'. Через этот параметр выражаются координаты точек Q и Q', то есть

$$\begin{aligned} s_i &= \varphi_1(\tau), \\ s_{i+1} &= \varphi_2(\tau). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Далее строятся графики этих функций в координатах s_i , s_{i+1} и τ. Точка их пересечения даст координату предельного цикла (Рисунок 4.16). Далее можно выполнить построения, аналогичные рассмотренным ранее.

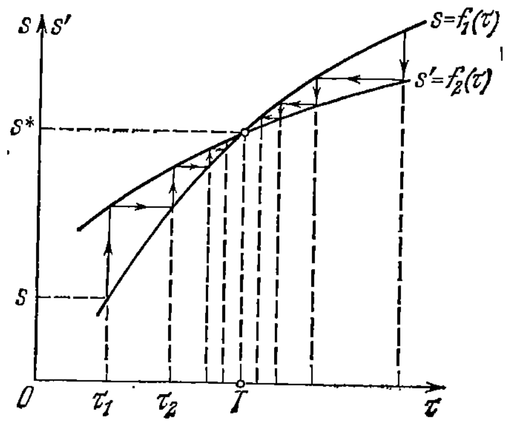

Рисунок 4.16 – Процесс точечного преобразования при использовании функции последования в параметрической форме